36. Hajós György Országos Matematikaverseny
2014.

1. Az $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ számok mindegyike 1 vagy -1, az összegük 0. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan $0 \le n \le 75$ egész szám, amelyre $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+25} = 1$.

2. Legyen egy forgáskúp alapkörének sugara r, magassága $2r$. Csökkentsük a kúp magasságát x-szel és ugyanennyivel növeljük alapkörének sugarát. Milyen x értéknél lesz a keletkezett kúp és az eredeti kúp térfogatának aránya maximális? Mekkora ebben az esetben a két kúp közös részének térfogata?

3. Bizonyítsa be, hogy az $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t),\ t > 0$ függvény szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

4. Határozza meg az $f(x) = (x-1)^2 + \frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{x}$ függvény szélsőértékeit és inflexiós pontjait!

5. Legyenek a C_1, C_2 és C_3 körök egy síkban és sugaruk rendre r_1, r_2 és r_3. Tegyük fel, hogy bármelyik két kör kívülről érinti egymást, továbbá a C_1, C_2 köröknek van olyan közös g érintő egyenese, amely párhuzamos a C_2, C_3 körök közös g' érintő egyenesével. Fejezze ki r_3 értékét r_1, r_2 segítségével!

Minden feladat helyes megoldása 20 pontot ér. Részmegoldást is értékelünk.

Jó munkát kíván a Versenybizottság!

Dr. Csató Sándor

Dr. Klincsik Mihály

Makó Margit

Dr. Molnár-Sáska Katalin

Dr. Tóth Zoltán

Dr. Obádovics J. Gyula

Dr. Szarka Zoltán

Budapest, 2014. április 25.